共形場理論のこころ (代数的組合せ論)

AUTHOR(S):

永友, 清和

CITATION:

永友, 清和. 共形場理論のこころ (代数的組合せ論). 数理解析研究所講究録 2003, 1327: 148-158

ISSUE DATE:

2003-06

URL:

http://hdl.handle.net/2433/43232

数理解析研究所講究録 1327 巻 2003 年 148-158

共形場理論のこころ

大阪大学大学院情報科学研究科　永友　清和 (Kiyokazu Nagatomo)
Graduate School of Information Science and Technology
Osaka University

共形場理論の主役である共形ブロックの概念と因子化定理を射影直線の場合に紹介することにより，共形場理論の目的とする事柄の解説を試みる。また，共形場理論の考え方の有効性を示す顕著な例の一つとして，いわゆる，モジュラー不変性を共形場理論の立場から証明する方針を与える[1]。この証明ではトーラス上の共形場理論において因子化定理が成立することを前提とする。この論説では非常に都合の良い条件の下で議論をおこなうが，WZNW 模型，極小模型など重要な例は設定の範疇に属している。

1　頂点作用素代数とその表現

頂点作用素代数は非負整数による次数付けをもつ複素数体 $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間 $V=\bigoplus_{\Delta=0}^{\infty}V_{\Delta}$ であって，各斉次元 $v\in V_{\Delta}$ に対して End V の元（モード）$J_n(v)\,(n\in\mathbf{Z})$ が定義されているものである。ここで $J_n(v)$ は次数が $-n$ であるものとする。つまり，$J_n(v):V_{\alpha}\rightarrow V_{\alpha-n}$ がすべての α に対して成り立っているものとする。この作用素を一斉に表示するために $J(v,z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}J_n(v)z^{-n-\Delta}$ とおく [2]。ここでは z はまったく形式的な変数であるが後々リーマン面の局所座標と同一視されることになる。$J(v,z)$ を状態 v に対応する場と呼ぶことにする。

頂点作用素代数 V には特別な元 $|0\rangle\in V_0$ と $T\in V_2$ が備わっている。状態 $|0\rangle$ は真空と呼ばれ，対応する場は恒等写像 id_V である。次数が 2 の状態 T は **Virasoro 元**と呼ばれ，対応する場は $T(z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}T(n)z^{-n-2}$ と表示される。すなわち，$T(n)=J_n(T)\,(n\in\mathbf{Z})$ である。$T(n)\,(n\in\mathbf{Z})$ と id_V は Virasoro 代数の V 上の表現を与える。その中心電荷を $c_V\in\mathbf{C}$ とおく：

$$[T(m),T(n)]=(m-n)T(m+n)+\frac{m^3-m}{12}c_V\,\mathrm{id}_V\quad(m,n\in\mathbf{Z})$$

頂点作用素代数においては各状態に対応するモード $J_n(v)$ がいくつかの公式を満たすことが要求される。そのうち，基本的なのは

[1]このような証明が可能であることは松尾 厚 氏の解説 [Ma] で看破されている。本解説で共形場理論の応用の題材とするモジュラー不変性に関しては松尾氏の記事に例を含めて丁寧に説明されている。
[2]通常の記号とは異なり z のべきが v の次数によりシフトされていることを注意する。

- 微分条件

$$\frac{d}{dz}J(v,z) = J(T(-1)v,z).$$

- Commutator formula

- Associativity formula

の三つの公式である。本解説ではこれらの具体的な式は必要としないのであえて記述しない。

頂点作用素代数 V の表現とは $\mathbf{C}$ 上のベクトル空間 M であって対応 $V \ni v \mapsto J_n^M(v) \in \mathrm{End}\, M$ が与えられ，さらに，微分条件，commutator formula，associativity formula を満たすものとして定義する。ただし，真空に対応する場は常に恒等写像であるとする。

2 射影直線上の共形ブロック

共形場理論は共形ブロックを定義し，その構造を解析する理論である。半安定曲線[3]上の共形ブロックを定義するのが最も一般性があるが，ここでは簡単の為に射影直線の場合に限って説明しよう。

射影直線 $\mathbb{P}^1$ 上の共形ブロックは射影直線の幾何学的情報を用いて定義される[4]。代数曲線を固定するとき，その上の共形ブロックは頂点作用素代数のいくつかの表現のテンソル積の双対空間における部分空間として定義される。ここでは簡単のため一つの表現 M から定まる共形ブロック (1 点共形ブロック) について説明するが，N 点共形ブロックの定義を想像するのは困難ではない。

射影直線 $\mathbb{P}^1 = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ の斉次座標を z とし，射影直線上の点 w を固定する。射影直線上で点 $z=w$ にのみ極をもつ $(1-\Delta)$-有理型微分のなすベクトル空間を $H^0(\mathbb{P}^1, \Omega^{1-\Delta}(*w))$ で表す。各 Δ に対してベクトル空間 $V_\Delta \otimes H^0(\mathbb{P}^1, \Omega^{1-\Delta}(*w))$ の元の M への作用を

$$(v \otimes f(z)(dz)^{1-\Delta})m = \operatorname*{Res}_{z=w} J(v, z-w)f(z)\, m\, dz \quad (m \in M)$$

により定義する。すべての Δ に関するこの作用による軌道の空間を $\mathfrak{g}_w^{out}M$ で表すことにする。もちろん，$\mathfrak{g}_w^{out}M$ は M の部分ベクトル空間である。点 w が射影直線上を動くにつれ部分空間 $\mathfrak{g}_w^{out}M$ も M のなかで動くことを注意する[5]。商ベクトル空間 $M/\mathfrak{g}_w^{out}M$ を余不変量の空間と呼び $\mathcal{V}_w(M)$ で表す。余不変量の空間の双対空間 $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M/\mathfrak{g}_w^{out}M, \mathbf{C})$ が共

[3]非特異であるか，特異点を持つ場合には通常 2 重点のみを特異点とする代数曲線のことである。
[4]非特異代数曲線 C の場合には以下の議論における $\mathbb{P}^1$ を C で置き換えればよい。
[5]点 w に関する依存性を的確に表現するには層の言葉を用いる。

形ブロックの空間である。共形ブロックとは $\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,\mathbf{C})$ の元 ϕ であって $\phi(\mathfrak{g}_w^{out}M)=0$ を満たすものに他ならない。

共形ブロックの幾何学的意義，あるいは，同値な定義について説明しよう。$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M,\mathbf{C})$ の元 ϕ が与えられているとする。このとき ϕ が共形ブロックであるための必要十分条件は任意の $v\in V_\Delta$ と $u\in M$ に対して $H^0(\mathbb{P}^1,\Omega^{1-\Delta}(*w))$ の元 $\phi_w(v,u:z)(dz)^\Delta$ で $z=w$ におけるローラン展開が

$$\phi_w(v,u:z)=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\phi(J_n^M(v)u)(z-w)^{-n-\Delta}$$

を満たすものが存在することである。その理由は $H^0(\mathbb{P}^1,\Omega^{1-\Delta}(*w))$ の元 $f(z)(dz)^{1-\Delta}$ に対して $\phi_w(v,u:z)f(z)dz$ は $z=w$ にのみ極をもつ射影直線上の有理形式であるので，

$$\begin{aligned}\operatorname*{Res}_{z=w}\phi_w(v,u:z)f(z)dz&=\sum_{n\in\mathbf{Z}}\operatorname*{Res}_{z=w}\phi(J_n^M(v)u)(z-w)^{-n-\Delta}f(z)dz\\&=\operatorname*{Res}_{z=w}\phi(J^M(v,z-w)f(z)u)dz\end{aligned}$$

と留数定理より ϕ が共形ブロックであることは $\phi_w(v,u:z)(dz)^\Delta$ が存在することに同値であるからである。

実は $w=0$ のとき，$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(M/\mathfrak{g}_w^{out}M,\mathbf{C})$ と $\mathrm{Hom}_V(V,D(M))$ の間にはベクトル空間としての標準的な同型が存在する。ここで，説明はしないが $D(M)$ は M の反傾加群 (contragredient module) である。もちろん，V-加群 M,N に対し $\mathrm{Hom}_V(M,N)$ は V-加群としてのすべての準同型のなすベクトル空間である。よって射影直線上の1点共形ブロックの空間は実質的には $\mathrm{Hom}_V(V,D(M))$ である。

2点以上の共形ブロックも同様にして定義される。例えば，2点 ∞ と 0 にそれぞれ V-加群 M_1 と M_2 が対応づけられているとき2点共形ブロックの空間は $\mathrm{Hom}_V(M_1,D(M_2))$ とベクトル空間として同型である。さらに3点 $\infty,1,0$ に V-加群 M_3,M_2,M_1 が対応づけられているとき，3点共形ブロックの空間は intertwining operator の空間 $\binom{D(M_3)}{M_2\ M_1}$ とベクトル空間として同型になる。

頂点作用素代数の表現論においてはその考察対象は通常 intertwining operator の空間までに限られる。頂点作用素代数が良い条件を満たす場合[6]には後で説明する因子化定理により射影直線上の3点共形ブロックの構造はリーマン面上の共形場理論自体を完全に記述する。その意味では3点共形ブロックまでを考えれば充分であるが，それは結果論であって，共形場理論としては3点以上の共形ブロックまで考察することが理論自体から要請されている。さらに頂点作用素代数の表現の圏は rigid braided tensor category であることが期待され，Lepowsky と Huang による一連の研究がある。表現の圏が tensor category で

[6]WZNW 模型，極小模型はこの条件を満たす。

あることを証明するには4点共形ブロックを考察する必要があり，実際，彼らはあらわではないが4点共形ブロックの構造を調べることにその理論の大半を費やしている。その点では，共形場理論の研究は即に tensor category の研究に結びつくものである。実際，土屋と蟹江の研究 [TK] はこの方向での初出の成果であり，頂点作用素代数の研究を推進する動機ともなっている。現在，共形場理論の手法を用いて tensor category の構造を調べる研究が重要な進展を見せていることを注意しておきたい[7]。この方向の研究は今後重要性をますものと筆者は考える。

さらに頂点作用素代数から共形場理論へ移行することにより点付きリーマン面，もっと一般に代数曲線のモジュライ空間の幾何学を理論の中へ取り込むことができる。その中でもモジュライ空間上のベクトル束の構成問題へは特筆すべき貢献を達成しつつある。

3　射影直線上の因子化定理

次節で説明するモジュラー不変性と関連して，射影直線上の因子化定理の概略を説明する。射影空間上の因子化定理は現時点では頂点作用素代数 V への一定の条件のもとで証明されている [NT]。その条件については第4節で述べることにする。

A と B を位数2以上の有限集合とし，$w_A = (w_a)_{A\in A}$ と $w_B = (w_b)_{b\in B}$ を射影直線上の相異なる点の集合とする。この各点に V-加群 $M^a\,(a\in A)$ と $M^b\,(b\in B)$ が対応する共形ブロックを考えよう。このとき，次の図で表現される次元の関係がある。

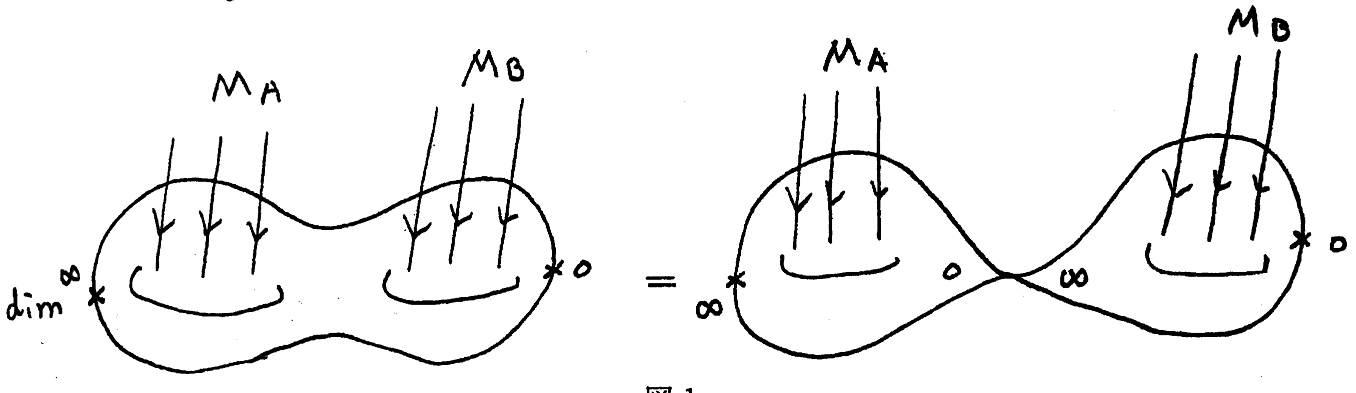

図1

図1の左辺は射影直線上の点集合 w_A と w_B に V-加群 $M^a\,(a\in A)$ と $M^b\,(b\in B)$ が対応づけられた余不変量の空間である。右辺は考えている空間が通常2重点をもつ曲線となっている。正確には2つの射影直線を0と ∞ で関係 $zt=0$ で同一視したものである。この場合には射影直線の場合に用いた標準直線束 Ω を双対層 (dualizing sheaf) で置き換える必要があるが，それ以外は全く同様に定義される。

[7]例えば [BK] を参照されたい。キーワードはモジュラー関手である。

さらに，図１の左辺の共形ブロックは次のように直和分解される（図２）：

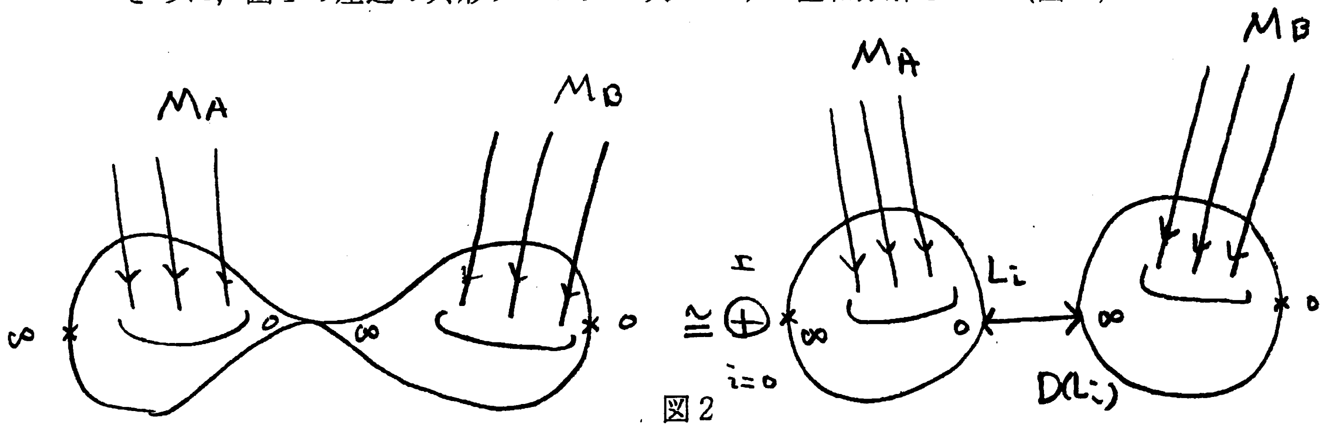

図２

右辺に現れている直和分解は前述の記号を用いれば

$$\bigoplus_{i=0}^{r} \mathcal{V}_{\{w_A,0\}}(M_A \otimes L_i) \otimes \mathcal{V}_{\{\infty,w_B\}}(D(L_i) \otimes M_B)$$

である。ここで L_i は既約 V-加群，$D(L_i)$ はその反傾加群である。よって右辺の直和因子にあらわれる共形ブロックに繰り返し因子化定理を用いることにより３点共形ブロックの次元の計算に帰着されることになる。

もう一つ真空の伝播を呼ばれる重要な事実を述べておく。これも図で表現するのが簡便かつ明快である（図３）：

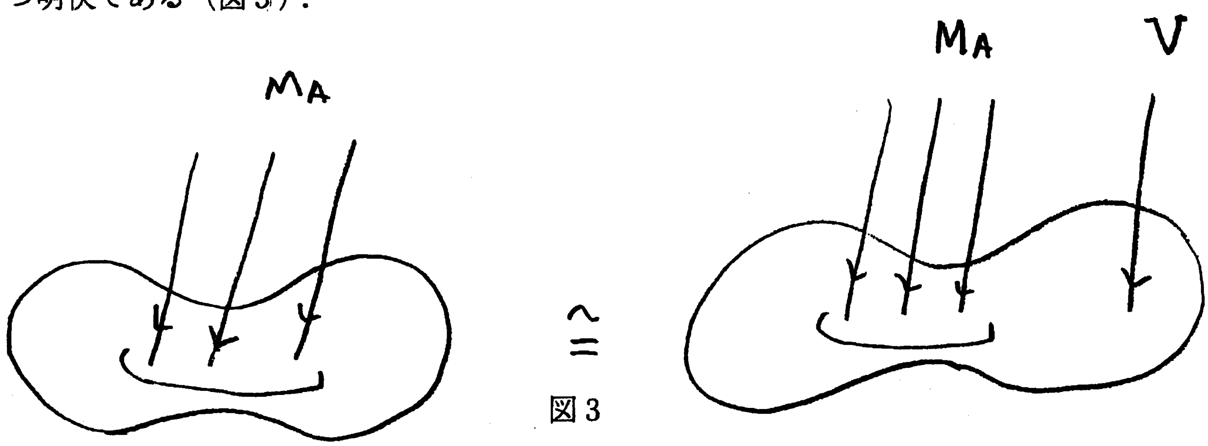

図３

この図の意味するところはあらかじめ与えられた点以外のどこに真空表現 V をさらに付け加えても，付け加える前と標準的（$u_A \mapsto u_A \otimes |0\rangle$）にベクトル空間として同型であることを意味する。この事実は tensor category において V が unit object であることを示す。

次の節では種数が１のコンパクトなリーマン面，すなわち，トーラス上での１点共形ブロックについて説明する。共形ブロックの概念を経由することにより指標のモジュラー不

変性が自然に説明されさらに因子化定理によりトーラス上の1点共形ブロックの次元が計算される。

4 トーラス上の共形ブロックとモジュラー不変性

トーラス[8]の構成には次の2つの方法がある。一つは，$\mathrm{Im}\,\tau > 0$である複素数τと1で生成される2次元格子による商空間$T_\tau = \mathbf{C}/\mathbf{Z}+\tau\mathbf{Z}$として実現する方法であり，他方は円環領域$\{w \in \mathbf{C} \mid |q| < |w| < 1\}$の境界を関係$w \sim wq$により同一視するものである。この実現においてはパラメータqとτは関係$q = e^{2\pi i\tau}$であらねばならない。最初の実現T_τにおいて，複素平面$\mathbf{C}$の座標zは自然にT_τの座標を定義する。この座標で$z=0$を代表元とするT_τ上の点を$Q=[0]$であらわすことにする。このとき対応する円環領域の点は$w=1$であり，座標zとwは変換則$w = e^{2\pi iz}-1$の関係にある。この変換に関して円環上の頂点作用素$Y(v,w)$とT_τ上の頂点作用素$Y[v,z]$は変換則

$$Y[v,z] = Y(v, e^{2\pi iz}-1)e^{2\pi iz \deg v}$$

で結びついている[9]。モジュラー不変性を考察するには座標zの方が都合が良いので以下では頂点作用素は$Y[v,z]$を考えることにする。また，頂点作用素$Y[v,z]$と$Y(v,z)$のモード展開は各

$$Y[v,z] = \sum_{n\in\mathbf{Z}} v[n]z^{-n-1}, \quad Y(v,z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} v(n)z^{-n-1}$$

を採用することにする[10]。

トーラス上の点Qに真空表現Vが対応する1点余不変量の空間の構造を調べよう。Weierstrassの$\mathfrak{p}$関数

$$\mathfrak{p}(z,\tau) = \frac{1}{z^2} + \sum_{n=1}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)z^{2n}$$

は$z=0$にのみ極をもつトーラス上の有理型関数であり，また

$$\mathfrak{p}(z,\tau)(dz)^{1-\Delta} \in H^0(T_\tau, \Omega^{1-\Delta}(*Q))$$

[8]正確には種数1のコンパクトなリーマン面というべきであろう。

[9]この変換則の一般形はY.-Z.Huangにより証明された。このタイプの変換則に基づく共形ブロックの定義は[F]あるいは[FB]で詳しく論じられている。特別な場合の考察は[Z1]が初出の文献である。文献[Z2]ではリーマン面上の共形ブロックの定義が述べられている。

[10]§1の記法と整合性が無くなるが宮本氏の論説[Mi]の記号に合わせる。

である。このとき，定数関数 1 と $\mathfrak{p}$ 関数に対し

$$\operatorname*{Res}_{z=0} Y[v,z]1\,dz = v[0],$$

$$\operatorname*{Res}_{z=0} Y[v,z]\mathfrak{p}(z,\tau)\,dz = v[-2] + \sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)G_{2n+2}(\tau)v[2n]$$

であるので，$O_q(V) \subseteq \mathfrak{g}_Q^{out}V$ である[11]。実は $\mathfrak{g}_Q^{out}V = O_q(V)$ であることがわかる。したがって $\mathcal{V}_Q(V) = V/O_q(V)$ であり，点 Q に真空表現 V が対応する 1 点共形ブロック（後に 1 点関数 と呼ぶ–これは $v \in V$ とモジュライのパラメータ τ の関数）$S(*,\tau)$ は $O_q(V)$ 上で 0 でなければならない。また，トーラスの複素構造，すなわち，パラメータ τ に関する依存性は $q = e^{2\pi i\tau}$ とするとき，微分方程式

$$q\frac{d}{dq}S(v,\tau) - S(L[-2]v,\tau) + \sum_{n=1}^{\infty}G_{2n}(\tau)S(L[2n-2]v,\tau) = 0 \tag{1}$$

で表現される[12]。モジュライのパラメータ τ に関する微分方程式 (1) と余不変量の空間上の関数となるための条件 $S(O_q(V),\tau) = 0$ を満たす関数を 1 点関数と呼ぶことにする。ベクトル空間 $\mathcal{V}_Q(V)$ を表現するのに次の図を度々用いる：

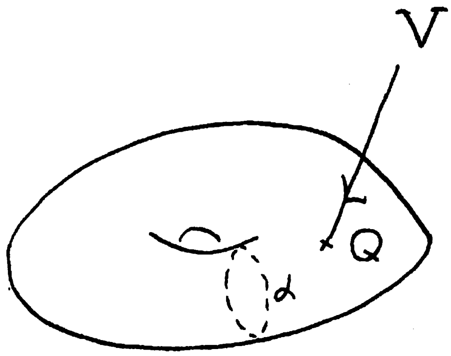

図 4

さて， affine Lie 環の可積分既約表現の "指標"[13]の張る線型空間に代表されるモジュラー不変性の現象を頂点作用素代数の観点から説明しよう。ここで重要なのは既約表現の指標の空間であって，モジュラー不変性は，種数 1 のコンパクト・リーマン面上の頂点作用素代数に基づく共形ブロックがモジュライ空間上で定義されていることから自明にした

---

[11] $O_q(V)$ の定義は宮本氏の論説を参考にしていただきたい。

[12] この微分方程式が成立することの証明は [Z1] で与えられている。モジュライ空間上のベクトル束の言葉で言えば Virasoro 代数の作用から得られる接続に関する平坦切断に対応する。

[13] Virasoro 代数の中心電荷によるシフトがあるので "" で囲んだ。

がうことを強調しておきたい。モジュラー不変性の証明のポイントは共形ブロックの空間が指標の1次結合で生成されていることを示すことである。

もう一度，我々の観点をまとめるのために記号を導入しておこう。1点共形ブロックでも特にモジュライのパラメータ τ に関する微分方程式 (1) を満たすもの全体を $\mathrm{Cor}_Q(V)$ で表すことにする[14]。モジュラー不変性の証明は次の事実に基づく：

- Virasoro 代数が V 上に作用している。その作用の中で $\{T(n)\}\,(n \geq 0)$ はトーラスにおける座標変換に関する共形ブロックの振る舞いを制御している。特に，モジュライのパラメータ τ を固定するとき，Q を固定する座標変換に関し $\mathcal{V}_Q(V)$ はベクトル束を定義する。

- Virasoro 代数の作用の中で $\{T(n)\}\,(n \geq -1)$ はモジュライのパラメータに関する変換性を記述している。すなわち，ベクトル空間 $\mathcal{V}_Q(V)$ は点付きリーマン面のモジュライ空間上のベクトル束である。特に，$T(-1)$ の作用はこのベクトル束の平坦接続を定義している。このベクトル束の平坦断面とは微分方程式 (1) の解に他ならない。

- 頂点作用素代数 V の既約表現の指標はベクトル空間 $\mathrm{Cor}_Q(V)$ の基底を与える。

上記で述べた事柄の中で最後の事実は任意の頂点作用素代数に対して成立するわけではない。ここで論じる場合の V に関する条件を述べておこう。

- 頂点作用素代数は C_2 有限である。すなわち，$C_2(V)$ を $a(-2)b\,(a, b \in V)$ で生成されるベクトル空間とするとき $V/C_2(V)$ は有限次元である。

- 任意の V -加群は 完全可約 である[15]。

C_2 有限性からの重要な帰結を述べておこう。頂点作用素代数 V が C_2 有限であれば，Zhu 代数[16]（あるいはゼロモード代数）は有限次元でありその有限次元既約表現は同型を除いて有限個しかない。それを $W_i\,(0 \leq i \leq r)$ としよう。また，既約 V-加群は有限個である。それを $L_i\,(0 \leq i \leq r)$ で表すことにする[17]。既約 V-加群 L_i の指標を $\chi_i(q)$ としよう：

$$\chi_i(q) = \mathrm{tr}_{L_i}\, q^{T(0) - c_V/24}$$

である。ここで c_V は Virasoro 代数の V 上の表現の中心電荷である。

---

[14]宮本氏の論説 [Mi] では $C_1(V)$ と書かれている

[15]現実にはこの条件は強すぎるのであって，Zhu 代数が半単純であることを仮定すれば十分である。ここでは，因子化定理も用いてモジュラー不変性を証明するので，因子化定理が成り立つための条件として表現の圏が半単純であることを仮定する。

[16]Zhu 代数については松尾氏の解説 [Ma] あるいは宮本氏の論説 [Mi] を参照されたい。

[17]L_i はある意味で W_i から誘導される表現である。

まずはじめに，V が C_2 有限であるとき，ベクトル空間 $\mathrm{Cor}_Q(V)$ は有限次元であることを注意しよう。正確には有限生成 $\mathbf{C}[[q]]$-加群というべきである。層の言葉を用いればモジュライ空間上の連接層であることまで示すことができる。よって，ベクトル空間 $\mathrm{Cor}_Q(V)$ の次元は q に依らず，ある固定した q で計算すれば良い。この場合には次元が $r+1$ であることを証明すれば目的を達することになる。そのためには余不変量の空間 $\mathcal{V}_Q(V)$ の次元を計算すればよい。さて，この次元を求めるために以下のリーマン面の変形を実現しよう。トーラスをサイクル α をピンチすることにより変形して一つの通常２重点をもつ特異曲線に変形する（図５）。

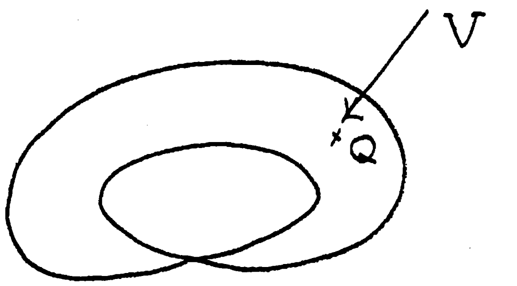

図５

この通常２重点を特異点とするリーマン面はモジュライ空間の Deligne-Mumford のコンパクト化における境界上の点に対応する。重要なことは，余不変量の層が境界まで込めて局所自由であることである。したがって，通常２重点をもつ特異曲線上の余不変量の空間の次元は変形する前の次元に一致する（図６）。これが因子化定理の最初の主張である：

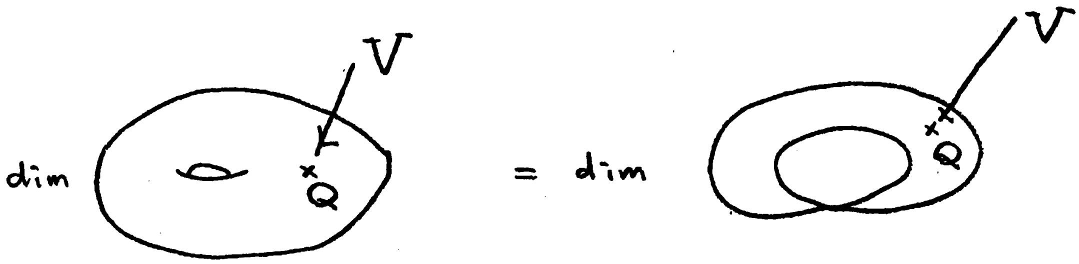

図６

したがって，通常２重点をもつ曲線上の余不変量の空間の次元を計算すればよい。この次元を計算するアイデアは一言でいえば一度通常２重点で曲線を分離し，その後貼り付ける操作を行うことである。通常２重点で分離すると２点，例えば，0 と ∞ が除かれた射影直

線が生じる。この射影直線上の3点余不変量の空間は2点 $0, \infty$ にそれぞれ $\bigoplus_{i=0}^{r} L_i \otimes W_i$, 点 Q に V が対応する余不変量の空間である（図7）。

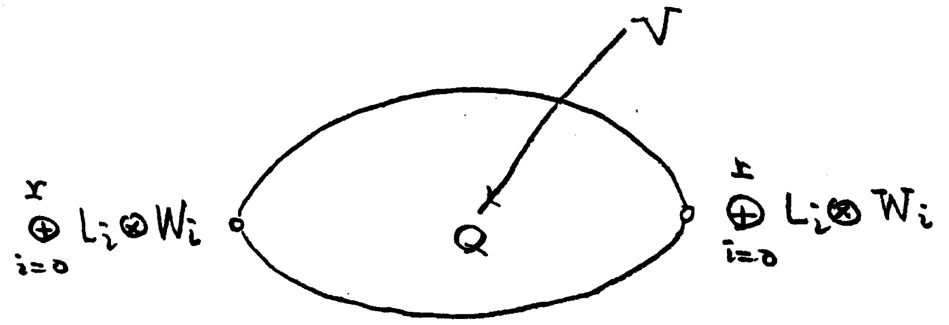

図7

この余不変量の空間を2点 $0, \infty$ で貼り合わせるとき，貼り合わせの関係式から L_i とその反傾表現 $D(L_i)$ のテンソル積のみが消えずに残ることになる。もっと詳しく言えば，真空の伝播を用いると2点 $0, \infty$ に $L_i, D(L_i)$ を対応させる余不変量の空間の直和になる。一方，この直和因子は $\mathrm{Hom}_V(L_i, L_i) \cong \mathbf{C}\cdot 1$ と同型である。よって，計算しようとしていた次元は $r+1$ であることが結論される。

参考文献

[Ma] 松尾　厚: 頂点作用素代数とそのモジュラー不変性についての概説，第47回代数学シンポジュウム報告集

[Mi] M. Miyamoto: A new stage of vertex operaor algebra, 本講究録

[BK] B. Bakalov, B., A. Kirillov, Jr.: *Lectures on Tensor Categories and Modular Functors*, University LECTURE Series vol. 21, AMS, Providence, Rhode Island, 2001.

[F] E. Frenkel: Séminaire BOURBAKI, No.875, Astérisque 299–339(2000)

[FB] E. Frenkel,D. Ben-Zvi: *Vertex Algebras and Algebraic Curves*, Mathematical Surveys and Monographs **88**, AMS, Providence, Rhode Island, 2001.

[NT] K. Nagatomo, A. Tsuchiya: Conformal field theories associated to regular chiral vertex operaor alegrbas I: theories over the projective line, math.QA/0206288

[TK] A. Tsuchiya, Y. Kanie: Vertex operators in conformal field theory on $\mathbb{P}^1$ and monodromy representations of braid group, in *Conformal Field Theory and Solvable Lattice Models*, Adv. Stud. Pure Math. **19**, Academic Press, Boston, 675–682 (1988)

[Z1] Y. Zhu: Modular invariance of characters of vertex operator algebras, J. Amer. Math. Soc. **9**, No.1, 237–302(1996)

[Z2] Y. Zhu: Global vertex operator algebras on Riemann surfaces, Commun. Math. Phy. **165**, 485–531(1994)